Esfuerzo normal

Esfuerzo normal:

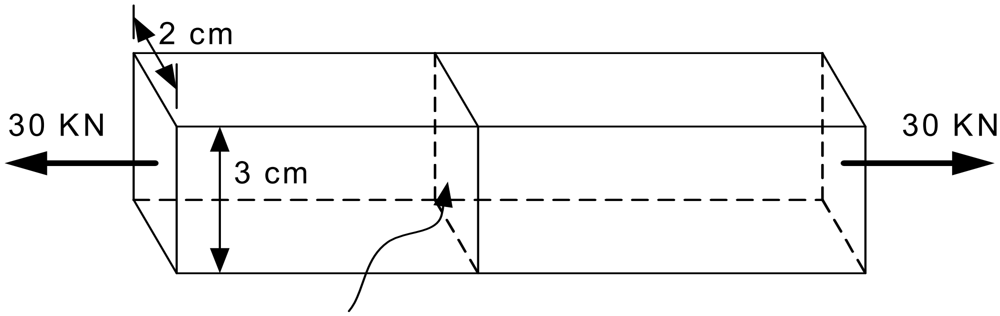
$$\sigma = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta P}{\delta A} = \frac{dP}{dA} = \frac{N_x}{A} \qquad N_x \perp A \qquad \left[\frac{N}{m^2} = Pa\right] \; o \; \left[\frac{lbs}{p\lg^2} = psi\right]$$

donde

$\sigma_n =$ Esfuerzo normal (sigma)

$N_x =$ Reacción interna en la sección transversal analizada

$A =$ Área de la sección transversal



Área de la sección transversal normal $= 6 \; cm^2$

Restricciones en el uso del modelo:

a) La sección analizada deberá estar lo suficientemente alejada del punto de aplicación de la carga.
b) La resultante de la fuerza interna pasa a través del centroide de la sección transversal del área.
c) El material es homogéneo e isotrópico.
d) No hay cambios bruscos en la sección transversal

Deformación unitaria:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \qquad \left[\frac{p\lg}{p\lg}\right] \; o \; \left[\frac{m}{m}\right]$$

donde

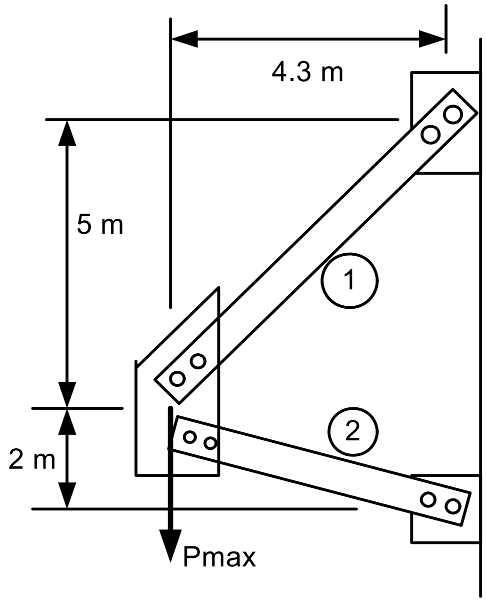
ε = Deformación unitaria (epsilón)
δ = Elongación o alargamiento (delta)
L = Longitud inicial de la sección analizada

Nota: Observe que la deformación unitaria es adimensional (no tiene unidades, pero no las puedes mezclar, eso significa que tanto la elongación como la longitud deben tener las misma unidades)

Ejemplo 1: **M1.4 MecMovies Timothy A. Philpot 2001-2011**

Two axial members are used to support a load P applied at joint B. Member (1) has a cross-sectional area of A_1 = 3080 mm^2 and an allowable normal stress of 180 MPa. Member (2) has a cross-sectional area of A_2 = 4650 mm^2 and an allowable normal stress of 75 MPa.

a) Determine the maximum load P that may be supported by the structure without exceeding either allowable normal stress.



$$A_1 := 3080 \cdot mm^2 \qquad \sigma_{p1} := 180 \cdot MPa$$

$$A_2 := 4650 \cdot mm^2 \qquad \sigma_{p2} := 75 \cdot MPa$$

$$x := 4.3 \cdot m \qquad h_2 := 2 \cdot m \qquad h_1 := 5 \cdot m$$

$$L_1 := \sqrt{x^2 + h_1^2} \qquad L_1 = 6.595\,m$$

$$L_2 := \sqrt{x^2 + h_2^2} \qquad L_2 = 4.742\,m$$

Teniendo los esfuerzos máximos permitidos en cada barra se obtiene la fuerza máxima que soporta cada elemento.

$$F_{1max} := \sigma_{p1} \cdot A_1 \qquad F_{1max} = 554.4 \cdot kN$$

$$F_{2max} := \sigma_{p2} \cdot A_2 \qquad F_{2max} = 348.75 \cdot kN$$

Suponiendo que la barra 1 sea la más cargada se puede obtener la carga que tendría la barra número 2

$$F_2\left(\frac{x}{L_2}\right) = F_1\left(\frac{x}{L_1}\right) \qquad F_2 := F_{1max} \cdot \left(\frac{L_2}{L_1}\right) \qquad F_2 = 398.679 \cdot kN$$

Del resultado obtenido se observa que se excede el valor máximo permitido de la barra por dicha solución no es factible de obtener

Ahora supongo que la carga máxima se presenta en el elemento 2 por lo que

$$F_1 := F_{2max} \cdot \left(\frac{L_1}{L_2}\right) \qquad F_1 = 484.969 \cdot kN$$

Solución factible

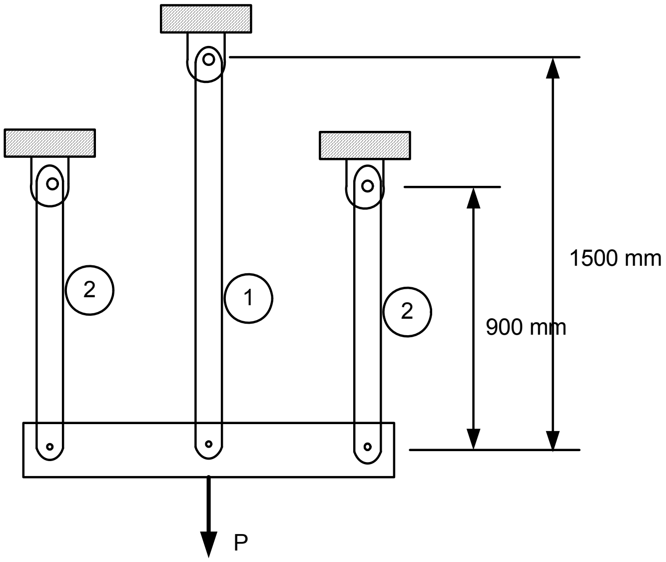
Cálculo de la carga máxima permisible del sistema

$$P_{max} := F_{2max} \cdot \left(\frac{h_2}{L_2}\right) + F_1 \cdot \left(\frac{h_1}{L_1}\right) \qquad P_{max} = 514.775 \cdot kN$$

Carga máxima permitida en el sistema

Ejemplo 2: **M2.1 MecMovies Timothy A. Philpot 2001-2011**

Una barra rígida ABC está soportada por tres barras, no hay deformación en las barras antes de que se aplique la carga. Después de que la carga P se aplica, la deformación unitaria en la barra 1 es de 1200 με
a) Determine la deformación unitaria de la barra 2.
b) Determine ε_2 si hay un claro de 0.5 mm en la conexión de las barras 2 y el cuerpo rígido antes de que se aplique la carga P



$h_2 := 900 \cdot mm \qquad h_1 := 1500 \cdot mm \qquad \varepsilon_1 := 1200 \cdot 10^{-6}$

$\Delta := 0.5 \cdot mm \qquad \delta_1 := \varepsilon_1 \cdot h_1 \qquad \delta_1 = 1.8 \times 10^{-3} m$

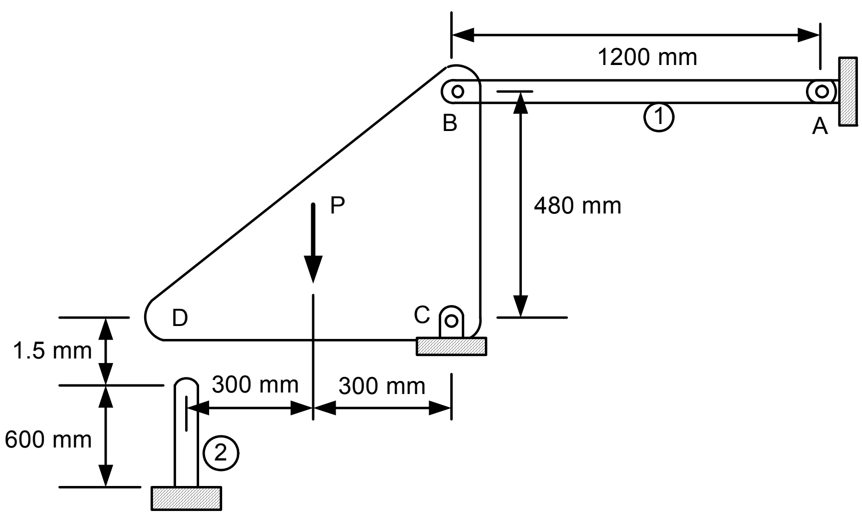
$\delta_2 := \delta_1 \qquad \varepsilon_2 := \dfrac{\delta_2}{h_2} \qquad \varepsilon_2 = 2 \times 10^{-3}$

$\delta_2 := \delta_1 - \Delta \qquad \delta_2 = 1.3 \cdot mm$

$\varepsilon_2 := \dfrac{\delta_2}{h_2} \qquad \varepsilon_2 = 1.444 \times 10^{-3}$

Ejemplo 3: **M2.4 MecMovies Timothy A. Philpot 2001-2011**

La carga P produce una deformación unitaria normal de -1800 με en el poste 2.
a) Determine la deformación unitaria de la barra 1.



$\Delta := 1.5 \cdot mm \qquad h_2 := 600 \cdot mm$

$L_1 := 1200 \cdot mm \qquad a := 300 \cdot mm$

$b := 300 \cdot mm \qquad c := 480 \cdot mm$

$\varepsilon_2 := 1800 \cdot 10^{-6} \qquad \delta_2 := \varepsilon_2 \cdot h_2$

$\delta_2 = 1.08 \cdot mm$

$\delta_D := \Delta + \delta_2$

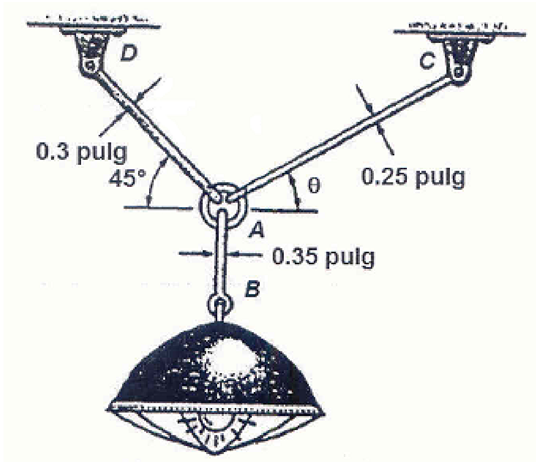
$\delta_D = 2.58 \cdot mm$

Estableciendo una relación de triangulos entre las deformaciones de los puntos B y D se tiene:

$\dfrac{\delta_D}{600} = \dfrac{\delta_B}{480} \qquad \delta_B := \dfrac{\delta_D \cdot (c)}{a + b} \qquad \delta_B = 2.064 \cdot mm \qquad \varepsilon_1 := \dfrac{\delta_B}{L_1} \qquad \varepsilon_1 = 1.72 \times 10^{-3}$

Ejemplo 4: **(1.42 R. C. Hibbeler Mechanics of materials 7a edition PEARSON)**

Una lámpara pesa 50 lb está soportada por tres barras de acero unidas por un anillo en A. Determine qué barra está sometida al esfuerzo normal mayor y calcule su valor. Tome θ = 30° El diámetro de cada barra está indicado en la figura.



$\sigma_{yp} := 40000 \cdot psi$ $\quad P := 50 \cdot lbf$ $\quad d_1 := 0.35 \cdot in$

$d_2 := 0.25 \cdot in$ $\quad d_3 := 0.3 \cdot in$ $\quad A_1 := \dfrac{\pi \cdot d_1^{\,2}}{4}$

$A_2 := \dfrac{\pi \cdot d_2^{\,2}}{4}$ $\quad A_3 := \dfrac{\pi \cdot d_3^{\,2}}{4}$ $\quad A_1 = 0.096 \cdot in^2$

$A_2 = 0.049 \cdot in^2$ $\quad A_3 = 0.071 \cdot in^2$

$\sigma_1 := \dfrac{P}{A_1}$ $\quad \sigma_1 = 519.69 \cdot psi$

Realizando la sumatoria de fuerzas tenemos

$$\sum F_x = 0$$
$$F_D \cos 45° = F_C \cos 30°$$
$$F_D = F_C \left(\frac{\cos 30°}{\cos 45°} \right)$$

$$\sum F_y = 0$$
$$F_D \sin 45° + F_C \sin 30° = 50$$
$$F_C \left(\cos 30° \tan 45° + \sin 30° \right) = 50$$

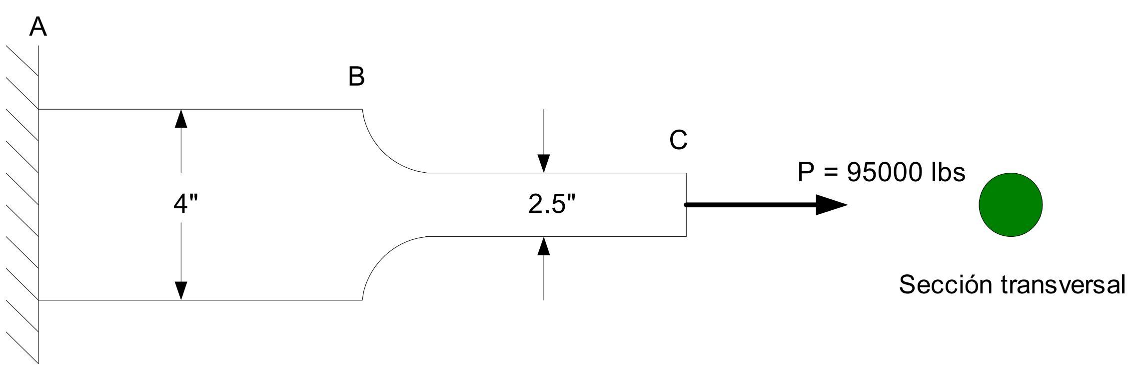
$F_C := \dfrac{P}{\cos(30 \cdot deg) \cdot \tan(45 \cdot deg) + \sin(30 \cdot deg)}$ $\quad F_C = 36.603 \cdot lbf$

$F_D := F_C \cdot \left(\dfrac{\cos(30 \cdot deg)}{\cos(45 \cdot deg)} \right)$ $\quad F_D = 44.829 \cdot lbf$

$\sigma_{AC} := \dfrac{F_C}{A_2}$ $\quad \sigma_{AC} = 745.661 \cdot psi$ $\quad \sigma_{AD} := \dfrac{F_D}{A_3}$ $\quad \sigma_{AD} = 634.197 \cdot psi$

Ejemplo 5: **(1.2-1 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 2nd edition Brooks/Cole)**

Una barra ABC tiene dos diferentes secciones transversales y está cargada con una fuerza axial de 95000 lbs (ver figura anexa). Ambas partes de la barra tienen sección tranversal circular y sus diámetros son de 4.0 in en la sección AB y 2.5 in en la sección BC. Calcula el esfuerzo normal en cada sección.



Calcule los esfuerzos en la sección A - B y en la sección B - C, no podemos calcular el esfuerzo en la parte donde existe el cambio de sección o en los extremos de la pieza.

Datos $P := 95000 \cdot lbf$ $d_{ab} := 4 \cdot in$ $d_{bc} := 2.5 \cdot in$ $A_{ab} := \dfrac{\pi \cdot d_{ab}^{2}}{4}$

$N_x := 95000 \cdot lbf$

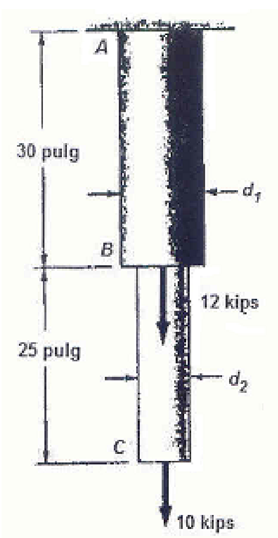
$\sigma_{ab} := \dfrac{N_x}{A_{ab}}$ $\sigma_{ab} = 7.56 \times 10^{3} \cdot psi$ Esfuerzo normal promedio $A_{bc} := \dfrac{\pi \cdot d_{bc}^{2}}{4}$

$\sigma_{bc} := \dfrac{N_x}{A_{bc}}$ $\sigma_{bc} = 1.935 \times 10^{4} \cdot psi$ Esfuerzo normal promedio

Comentario: Observe que el esfuerzo en la sección B-C es mayor, ya que tiene una menor área.

Ejemplo 6:

Dos varillas cilíndricas sólidas AB y BC se encuentran soldadas en B y cargadas como se muestra. Si el esfuerzo normal no debe exceder de 25 ksi en ninguna varilla, calcule los valores mínimos permisibles de los diámetros d_1 y d_2.



$\sigma_{BC} := 25000 \cdot psi$ $\sigma_{AB} := 25000 \cdot psi$

$P_2 := 10000 \cdot lbf$ $P_1 := 22000 \cdot lbf$

$A_2 := \dfrac{P_2}{\sigma_{AB}}$ $A_1 := \dfrac{P_1}{\sigma_{BC}}$

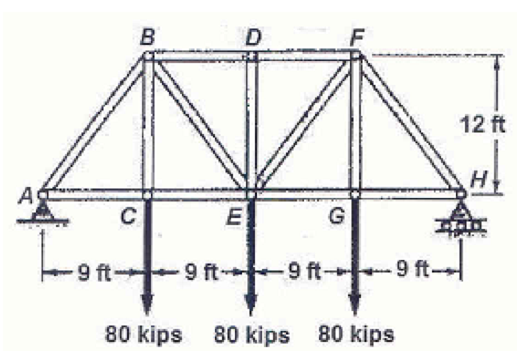
$d_2 := \sqrt{\dfrac{4 \cdot A_2}{\pi}}$ $d_1 := \sqrt{\dfrac{4 \cdot A_1}{\pi}}$

$d_2 = 0.714 \cdot in$ $d_1 = 1.059 \cdot in$

Nota: No se está considerando el peso de las propias varillas, pero se puede considerar en caso de ser necesario

Ejemplo 7:

Para la armadura de puente tipo Pratt y la carga mostrada en la figura, determine el esfuerzo normal promedio en el elemento BE, si el área de la sección transversal del elemento es de 5.87 pulg^2.



$P_1 := 80000 \cdot lbf$ $P_2 := 80000 \cdot lbf$ $P_3 := 80000 \cdot lbf$

$L_1 := 9 \cdot ft$ $L_2 := 9 \cdot ft$ $L_3 := 9 \cdot ft$ $L_4 := 9 \cdot ft$

$h := 12 \cdot ft$ $L := L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ $A_{BE} := 5.87 \cdot in^{2}$

$$\sum M_A = 0$$

$$P_1(L_1) + P_2(L_1 + L_2) + P_3(L_1 + L_2 + L_3) = R_{HY}(L)$$

$$R_{HY} := \frac{P_1 \cdot L_1 + P_2 \cdot (L_1 + L_2) + P_3 \cdot (L_1 + L_2 + L_3)}{L}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$R_{HY} = 1.2 \times 10^{5} \cdot lbf$

$$P_1 + P_2 + P_3 = R_{AY} + R_{HY}$$

$R_{AY} := P_1 + P_2 + P_3 - R_{HY}$ $\qquad R_{AY} = 1.2 \times 10^{5} \cdot lbf$

Realizando la suma de fuerzas en el nodo C se tiene $\qquad R_{BC} := P_1$ $\qquad L_{AB} := \sqrt{L_1^{\,2} + h^2}$

$R_{AB} := R_{AY} \cdot \left(\dfrac{L_{AB}}{h}\right)$ $\qquad R_{AB} = 1.5 \times 10^{5} \cdot lbf$ $\qquad R_{AC} := R_{AB} \cdot \left(\dfrac{L_1}{L_{AB}}\right)$ $\qquad R_{AC} = 9 \times 10^{4} \cdot lbf$

$R_{CE} := R_{AC}$ $\qquad R_{CE} = 9 \times 10^{4} \cdot lbf$ $\qquad L_{BE} := L_{AB}$

Efectuando la suma de momentos en el nodo D al realizar un corte en las barras BD, BE y CE se tiene que

$$\sum M_D = 0$$

$$R_{BE}\left(\frac{h}{L_{BE}}\right)(L_2) + P_2(L_2) + R_{CE}(h) = R_{AY}(L_1 + L_2)$$

$$R_{BE} := \frac{R_{AY} \cdot (L_1 + L_2) - P_2 \cdot L_2 - R_{CE} \cdot h}{\dfrac{h}{L_{BE}} \cdot L_2}$$

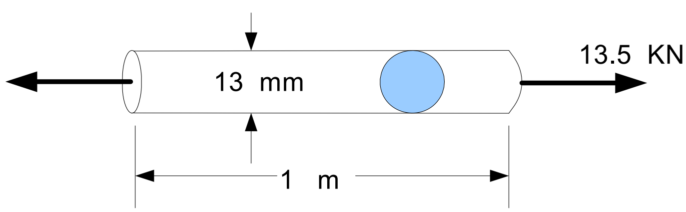
$R_{BE} = 5 \times 10^{4} \cdot lbf$

Finalmente calculamos el esfuerzo en la barra

$\sigma_{BE} := \dfrac{R_{BE}}{A_{BE}}$ $\qquad \sigma_{BE} = 8.518 \times 10^{3} \cdot psi$ **TENSIÓN**

Ejemplo 8: **(1.2-9 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 2nd edition Brooks/Cole)**

Una barra de acero de 1 m de longitud y 13 mm de diámetro recibe una carga de tensión de 13500 N. Determine el esfuerzo normal, la elongación de la barra y la deformación unitaria de la barra mostrada.



Datos $\quad P := 13500 \cdot N \qquad d := 0.013 \cdot m$

$L := 1 \cdot m \qquad E := 200 \cdot 10^{9} \cdot Pa \qquad N_x := 13500 \cdot N$

$A := \dfrac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad A = 1.327 \times 10^{-4} \, m^2$

$\sigma_n := \dfrac{N_x}{A}$ $\qquad \sigma_n = 101.708 \cdot MPa$ $\qquad$ Esfuerzo normal

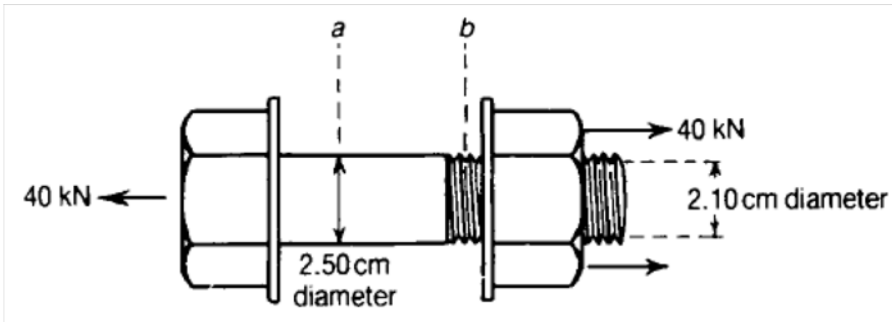
$\delta := \dfrac{N_x \cdot L}{A \cdot E}$ $\qquad \delta = 5.085 \times 10^{-4} \, m$ $\qquad$ Deformación o elongación

$\varepsilon := \dfrac{\delta}{L}$ $\qquad \varepsilon = 5.085 \times 10^{-4}$ $\qquad$ Deformación unitaria (adimensional)

Comentario: la deformación unitaria y la elongación no tienen el mismo valor siempre, en este caso es casualidad que sean iguales, ya que la longitud es unitaria.

Ejemplo 9: **Prob 1-2 Case John, Chilver A.H and Ross Carl T.F Strength of materials and structure fourth edition 1999 John Wiley & Sons Inc.**

Un tornillo de acero de 2.5 cm de diámetro, soporta una carga de tensión de 40000 N. Estime el esfuerzo de tensión promedio en la sección a - a y en la parte roscada sección b - b, donde el diámetro en la raíz de la rosca es de 2.10 cm



$$d_t := 2.5 \cdot cm$$

$$F_t := 40000 \cdot N$$

$$d_r := 2.10 \cdot cm$$

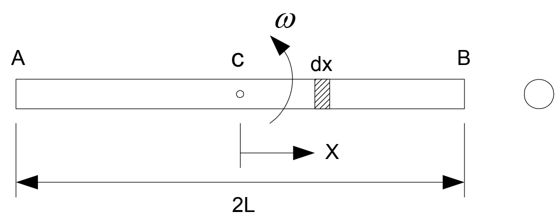
$$A_t := \frac{\pi \cdot d_t^{2}}{4}$$

$$A_r := \frac{\pi \cdot d_r^{2}}{4}$$

$$\sigma_{aa} := \frac{F_t}{A_t} \qquad \sigma_{aa} = 81.487 \cdot MPa \qquad \sigma_{bb} := \frac{F_t}{A_r} \qquad \sigma_{bb} = 115.487 \cdot MPa$$

Ejemplo 10: **(1.2-12 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 2nd edition Brooks/Cole)**

La barra circular mostrada esta soportada en el punto c y gira a una velocidad angular constante, si el material de que esta hecho es homogéneo y tiene un peso específico γ. Determine el esfuerzo normal como una función de la distancia x, inducido en la barra por el efecto de la rotación del cuerpo. ¿Cuál es el esfuerzo máximo de tensión ?



$$a_n = \bar{\omega} \times \left[\bar{\omega} \times \bar{r} \right]$$ Aceleración normal

$$a_t = \bar{\alpha} \times \bar{r} = 0$$ Aceleración tangencial

$$\omega = cte \;\Rightarrow\; \alpha = 0$$

$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$$
$$\gamma V = mg$$

$$F_n = \int_X^L a_n dm = \int_X^L \omega^2 x \left(\frac{\gamma A}{g} dx \right)$$

$$dm = \frac{\gamma}{g}(dV) = \frac{\gamma}{g}(Adx)$$

$$\sigma_n = \frac{F_n}{A} = \frac{\frac{\omega^2 \gamma A}{g} \int_X^L xdx}{A} = \frac{\omega^2 \gamma}{g} \frac{x^2}{2} \Big|_X^L$$

$$\sigma_n = \frac{\omega^2 \gamma}{2g} \left(L^2 - x^2 \right)$$

El esfuerzo normal máximo sucede en el punto donde gira cuando x = 0 (observe la figura) por lo que el máximo esfuerzo de tensión es de:

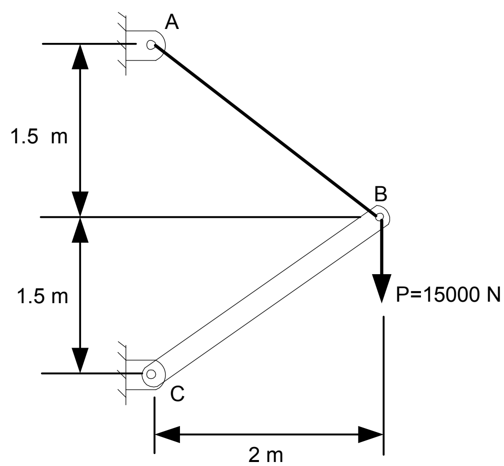
$$\sigma_{\max} = \frac{\omega^2 \gamma L^2}{2g}$$

Comentario: Del resultado obtenido observa que el factor velocidad angular influye en forma cuadrática, por lo que mientras más grande sea la velocidad angular el esfuerzo normal se incrementa mucho, observe la velocidad a la que giran los generadores eólicos y también el tamaño de las aspas de los mismos.

Ejemplo 11: **(1.2-10 Gere & Timoshenko, Mechanics of materimalals 2nd edition Brooks/Cole)**

En el sistema mostrado, determine el esfuerzo normal que se genera en la barra y en el cable, e indique si se encuentran trabajando en tensión o compresión. El cable tiene una sección transversal efectiva de 120 mm^2 y la barra tiene una sección tranversal de 250 mm^2 y se le aplica una carga de 15000 N

a) Si el cable se elonga 1.3 mm ¿cuál es la deformación unitaria?
b) Si la barra se acorta 0.62 mm ¿cuál es su deformación unitaria?



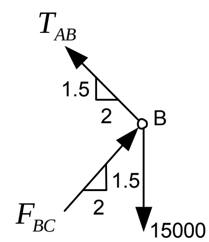
Datos :

$A_c := 120 \cdot 10^{-6} \cdot m^2$ $\quad A_b := 250 \cdot 10^{-6} \cdot m^2$

$P := 15000 \cdot N$ $\quad L_c := 2.5 \cdot m$ $\quad L_B := 2.5 \cdot m$

$\delta_c := 0.0013 \cdot m$ $\quad \delta_b := -0.00062 \cdot m$

Solución: DCL del nodo B



$$\sum F_x = 0$$

$$T_{AB}\left(\frac{2}{\cancel{2.5}}\right) = F_{BC}\left(\frac{2}{\cancel{2.5}}\right)$$

$$T_{AB} = F_{BC}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$15000 = F_{BC}\left(\frac{1.5}{2.5}\right) + T_{AB}\left(\frac{1.5}{2.5}\right)$$

$$15000 = \left(\frac{1.5}{2.5}\right)(2T_{AB})$$

$T_{AB} := \frac{2.5 \cdot P}{3}$ $\quad T_{AB} = 1.25 \times 10^4 N$

$F_{BC} := T_{AB}$ $\quad F_{BC} = 1.25 \times 10^4 N$

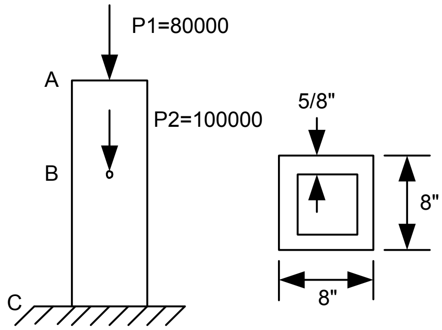
$\sigma_{AB} := \frac{T_{AB}}{A_c}$ $\quad \sigma_{AB} = 104.167 \cdot MPa$ $\quad$ Tensión $\quad \sigma_{BC} := \frac{-F_{BC}}{A_b}$ $\quad \sigma_{BC} = -50 \cdot MPa$ $\quad$ Compresión

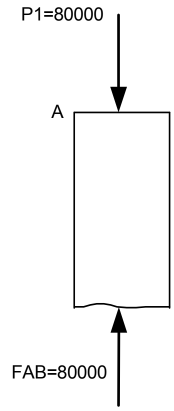
$\varepsilon_{AB} := \frac{\delta_c}{L_c}$ $\quad \varepsilon_{AB} = 5.2 \times 10^{-4}$ $\quad$ Deformación unitaria del cable

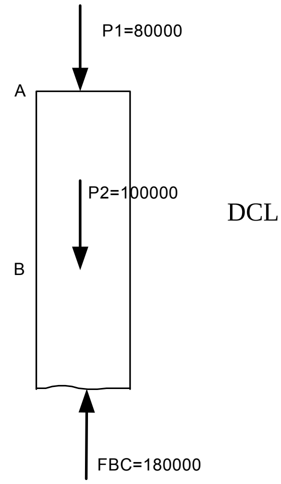
$\varepsilon_{BC} := \frac{\delta_b}{L_B}$ $\quad \varepsilon_{BC} = -2.48 \times 10^{-4}$ $\quad$ Deformación unitaria de la barra

Ejemplo 12: **(1.2-5 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 2nd edition Brooks/Cole)**

Para la columna mostrada determine el esfuerzo normal en la sección AB y la sección BC. La columna está construida de una sección cuadrada hueca y tiene las dimensiones mostradas en la figura anexa y soporta dos cargas concentradas de 80,000 lbs y 100,000 lbs.







Datos:

$P_1 := 80000 \cdot lbf$ $\qquad P_2 := 100000 \cdot lbf$

$F_{AB} := -80000 \cdot lbf$ $\qquad F_{BC} := -180000 \cdot lbf$

DCL

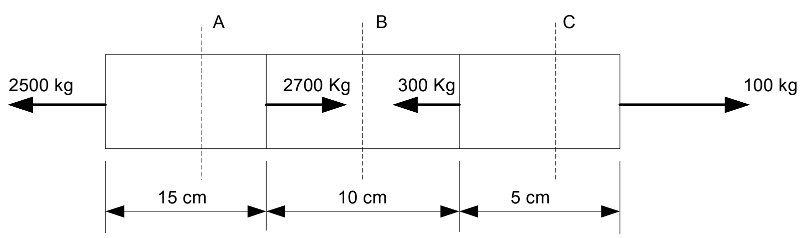
$$A := 8 \cdot 8 \cdot in^2 - \left(\frac{27}{4}\right)^2 \cdot in^2 \qquad A = 18.438 \cdot in^2$$

Solución

$$\sigma_{AB} := \frac{F_{AB}}{A} \qquad \sigma_{AB} = -4.339 \times 10^3 \cdot psi \qquad \sigma_{BC} := \frac{F_{BC}}{A} \qquad \sigma_{BC} = -9.763 \times 10^3 \cdot psi$$

Ejemplo 13: (1-1 Jorge Iván Díaz, Sergio Zapata Resistencia de materiales 2a edición edit Limusa)

Una barra de acero de sección rectangular (4 cm x 3 cm) soporta las cargas mostradas en la figura, calcule los esfuerzos normales indicados en las secciones A, B y C.



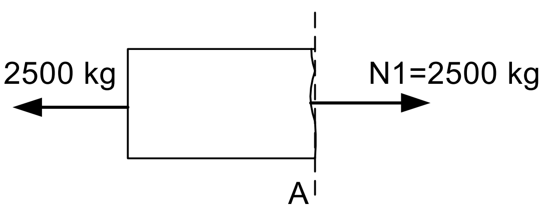
Datos : $P1 := 2500 \cdot kg$

$P2 := 2700 \cdot kg \qquad P3 := 300 \cdot kg$

$P4 := 100 \cdot kg \qquad h := 4 \cdot cm$

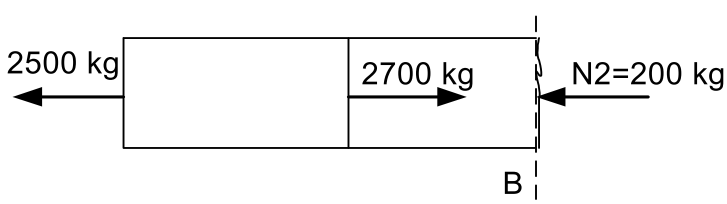
$t := 3 \cdot cm \qquad A := h \cdot t$

Solución.



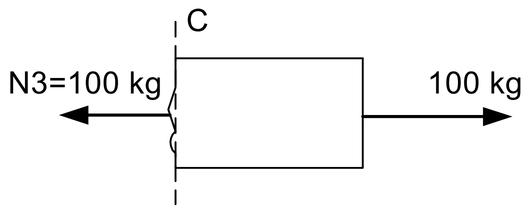
$N_1 := 2500 \cdot kg \qquad A = 12 \cdot cm^2$

$$\sigma_A := \frac{N_1}{A} \qquad \sigma_A = 208.333 \cdot \frac{kg}{cm^2}$$



$N_2 := -200 \cdot kg$

$$\sigma_B := \frac{N_2}{A} \qquad \sigma_B = -16.667 \cdot \frac{kg}{cm^2}$$

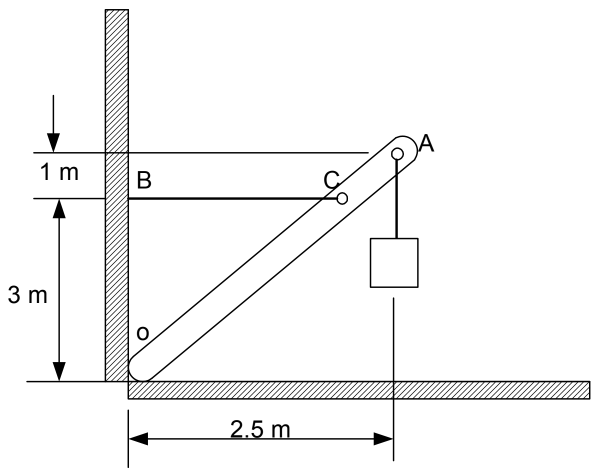


$N_3 := 100 \cdot kg$

$\sigma_C := \frac{N_3}{A}$ $\sigma_C = 8.333 \cdot \frac{kg}{cm^2}$

Ejemplo 14: **(1-5 Jorge Iván Díaz, Sergio Zapata Resistencia de materiales 2a edición edit Limusa)**

Un cuerpo de masa 1000 kg se encuentra suspendido por la barra de madera OA, que tiene una sección transversal rectangular (4 cm x 5 cm). El sistema se mantiene en equilibrio mediante el cable BC cuyo diámetro es de 1 cm. Determine los esfuerzos normales inducidos tanto en la barra como en el cable.



Datos : $d := 1 \cdot cm$ $b := 4 \cdot cm$ $h := 5 \cdot cm$

$m_a := 1000 \cdot kg$ $x := 2.5 \cdot m$ $h_1 := 3 \cdot m$

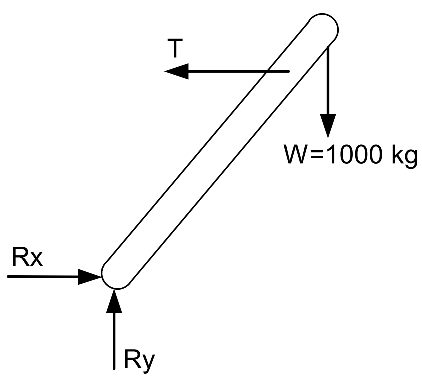
$h_2 := 1 \cdot m$ $h_t := h_1 + h_2$ $A_b := b \cdot h$

$h_t = 4\,m$ $A_c := \frac{\pi}{4} \cdot d^2$ $W_a := m_a \cdot g$

$W_a = 9.807 \times 10^3\,N$ $A_b = 2 \times 10^{-3}\,m^2$

$A_c = 7.854 \times 10^{-5}\,m^2$ $OA := \sqrt{x^2 + h_t^2}$

$OA = 4.717\,m$



Nota: La sección OC de la barra trabaja solamente en compresión pero el extremo AC trabaja en flexión y compresión.

$$\sum M_o = 0$$

$$T(3) = W(2.5)$$

$$T = \frac{W(2.5)}{3}$$

$T_c := \frac{W_a \cdot x}{h_1}$ $T_c = 8.172 \times 10^3\,N$

$\sigma_c := \frac{T_c}{A_c}$ $\sigma_c = 104.052 \cdot MPa$ **Tensión**

$N_x := T_c \cdot \left(\frac{x}{OA}\right) + W_a \cdot \left(\frac{h_t}{OA}\right)$ $N_x = 1.265 \times 10^4 \cdot N$ $\sigma_b := \frac{N_x}{A_b}$ $\sigma_b = 6.324 \cdot MPa$ **Compresión**

Ejemplo 15: **(2-3 Jorge Iván Díaz, Sergio Zapata Resistencia de materiales 2a edición edit Limusa)**

Un cable fabricado con un material cuyo peso específico es de 7400 kg/m^3 y un módulo de elasticidad de 1,900,000 kg/cm^2 , tiene una longitud de 450 m y cuelga en un pozo profundo, determine:

a) El esfuerzo máximo inducido en el cable.

b) La deformación debida a su peso.

Datos : $L := 450 \cdot m$ $\quad \gamma := 7400 \cdot \dfrac{kg}{m^3}$ $\quad E := 1900000 \cdot \dfrac{kg}{cm^2}$ $\quad dW = \gamma A dx$

Solución.

$\sigma := \gamma \cdot L$ $\quad \sigma = 3.33 \times 10^6 \dfrac{kg}{m^2}$

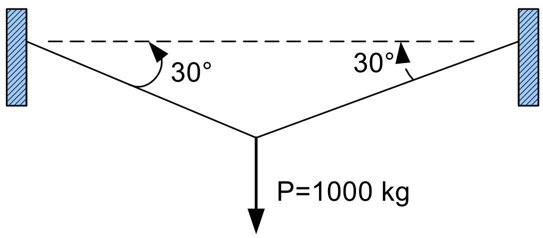
$$d\delta = \frac{dWx}{AE} = \frac{(\gamma \cancel{A} dx)x}{\cancel{A}E} = \frac{\gamma}{E}xdx \qquad \delta := \int_0^L \frac{\gamma \cdot x}{E}\,dx$$

$\delta = 0.039\,m$

$$\delta = \int_0^L \frac{\gamma}{E}xdx = \frac{\gamma}{E}\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{\gamma L^2}{2E}$$

Ejemplo 16: **(2-11 Jorge Iván Díaz, Sergio Zapata Resistencia de materiales 2a edición edit Limusa)**

Las barras de bronce comercial mostradas en la figura tienen 3 metros de longitud, y en su punto de unión se aplica una carga de 1000 kg. Si se desea un factor de seguridad de 2.5, determine:
a) Las secciones transversales de las barras de bronce.
b) La distancia vertical que recorre el punto de unión al aplicarse la carga.



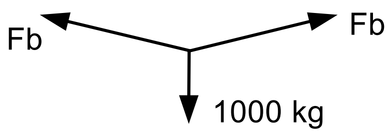
Datos : $FS := 2.5$ $\quad L := 3 \cdot m$ $\quad m_a := 1000 \cdot kg$ $\quad \theta := 30 \cdot deg$

$E := 103 \cdot GPa$ $\quad \sigma_{yp} := 345 \cdot MPa$ $\quad \sigma_{ult} := 655 \cdot MPa$

$W := m_a \cdot g$

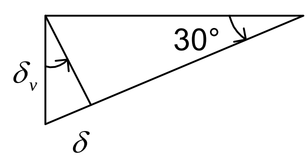
De tablas obtenemos la información del esfuerzo de cedencia del bronce comercial.

$\sum F_x = 0$ La fuerza en las barras deben ser iguales



$\sum F_y = 0$

$2F_b \sin(\theta) = 1000$



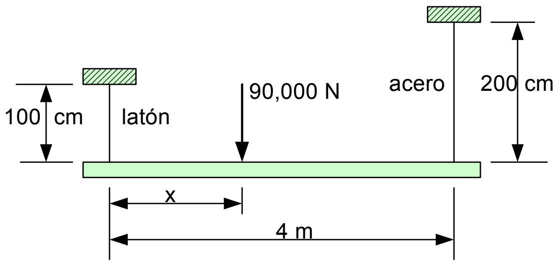
$\sigma_w := \dfrac{\sigma_{yp}}{FS}$ $\quad \sigma_w = 138 \cdot MPa$ $\quad F_b := \dfrac{W}{2 \cdot \sin(\theta)}$ $\quad F_b = 9.807 \times 10^3 N$ $\quad sen30° = \dfrac{\delta}{\delta_v}$

$A := \dfrac{F_b}{\sigma_w}$ $\quad A = 0.711 \cdot cm^2$ $\quad \delta := \dfrac{\sigma_w \cdot L}{E}$ $\quad \delta = 0.402 \cdot cm$ $\quad \delta_v = 0.804 \cdot cm$ $\quad \delta_v := \dfrac{\delta}{\sin(\theta)}$

Ejemplo 17: **(2.2-3 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 2nd edition Brooks/Cole)**

Una barra horizontal de 4 m de longitud que pesa 2400 N está soportada en los extremos mediante una varilla de latón de 1 m de longitud y mediante una varilla de acero de 2 m de longitud. La varrilla de latón tiene un área de 320 mm^2 y la varilla de acero un área de 480 mm^2 determinar:
a) La distancia a partir de la varilla de latón, a la cual debería aplicarse una carga de 90 KN para asegurar que la barra se conservará horizontal después de cargarla.
b) El esfuerzo resultante en cada varilla.

Ojo: Sistema hiperestático



Datos : $L := 4 \cdot m$ $P := 90000 \cdot N$

$W := 2400 \cdot N$ $L_l := 1 \cdot m$ $A_l := 320 \cdot mm^2$

$L_a := 2 \cdot m$ $A_a := 480 \cdot mm^2$ $E_l := 100 \cdot 10^9 \cdot Pa$

$E_a := 200 \cdot 10^9 \cdot Pa$ Ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_y = 0$$

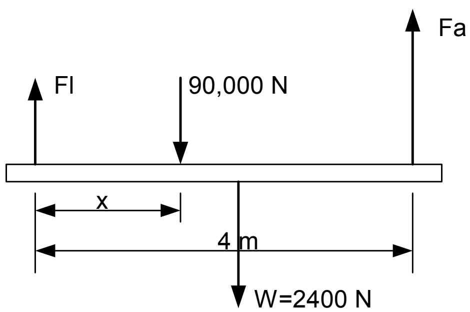
$$W + P = F_l + F_a$$

$A_l = 3.2 \times 10^{-4} \, m^2$

$A_a = 4.8 \times 10^{-4} \, m^2$

$$\sum M_A = 0$$

$$P * x + W * \frac{L}{2} = F_a * L$$



Nota: Para asegurar que la barra permenecerá horizontal después de aplicarle la carga debemos asegurar que las deformaciones en los dos cables es igual para que bajen la misma distancia vertical en ambos extremos.

$$\delta_{acero} = \delta_{laton}$$

$$\frac{F_a L_a}{E_a A_a} = \frac{F_l L_l}{E_l A_l}$$

Ecuación de compatibilidad del sistema hiperestático

De la ecuación anterior obtenemos la información de la relación que se debe tener entre las dos fuerzas en los cables para poder asegurar que la barra baja en forma horizontal

$$\frac{2F_a}{200 * \cancel{10^9}\left(480 * \cancel{10^{-6}}\right)} = \frac{1F_l}{100 * \cancel{10^9}\left(320 * \cancel{10^{-6}}\right)}$$

$$F_a = \frac{3}{2} F_l$$

Sustituyendo la expresión anterior en las dos ecuaciones de suma de fuerzas y de momentos, obtenemos la solución del sistema de ecuaciones (tres ecuaciones con tres incógnitas)

$$\frac{3}{2} F_l + F_l = 92400$$

$$F_l = \frac{92400(2)}{5}$$ $F_l := \frac{2(W + P)}{5}$ $F_l = 3.696 \times 10^4 \, N$

$F_a := \frac{3 \cdot F_l}{2}$ $F_a = 5.544 \times 10^4 \, N$

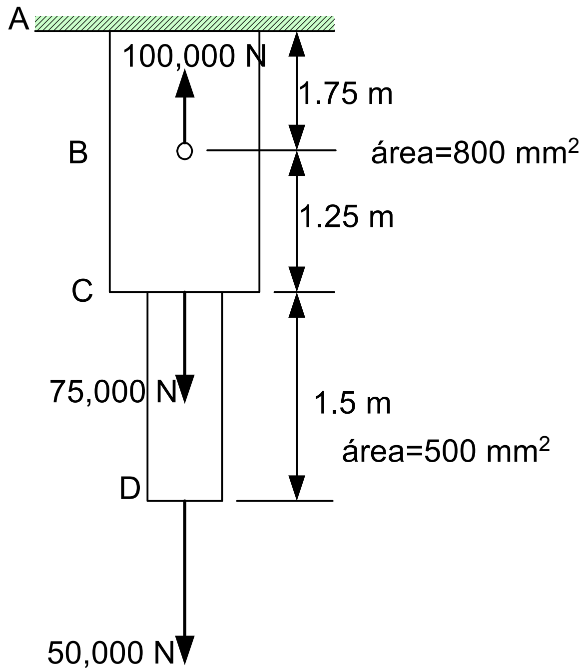
$x := \frac{F_a \cdot L - W \cdot \frac{L}{2}}{P}$ $x = 2.411 \, m$ Posición donde deberá colocarse la carga para que la barra baje horizontalmente

$\sigma_l := \frac{F_l}{A_l}$ $\sigma_l = 115.5 \cdot MPa$

$\sigma_a := \frac{F_a}{A_a}$ $\sigma_a = 115.5 \cdot MPa$

Ejemplo 18:

La varilla ABCD está hecha de una aleación de aluminio, con un módulo de elasticidad de 70 GPa. Para la carga mostrada y despreciando el peso propio de la varilla, hallar la deformación:
a) del punto B
b) del punto D



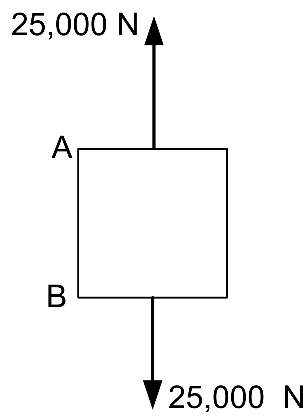
Datos :

$E := 70 \cdot GPa$ $\quad A_{ab} := 800 \cdot mm^2$

$L_{ab} := 1.75 \cdot m$ $\quad F_{ab} := 25000 \cdot N$

$F_{cd} := 50000 \cdot N$ $\quad L_{cd} := 1.5 \cdot m$

$F_{bc} := 125000 \cdot N$ $\quad L_{bc} := 1.25 \cdot m$



$A_{cd} := 500 \cdot mm^2$

$A_{bc} := 800 \cdot mm^2$

$A_{ab} = 8 \times 10^{-4}\, m^2$

$A_{bc} = 8 \times 10^{-4}\, m^2$

$A_{cd} = 5 \times 10^{-4}\, m^2$

a) $\delta_b := \dfrac{F_{ab} \cdot L_{ab}}{A_{ab} \cdot E}$ $\quad \delta_b = 0.781 \cdot mm$ hacia abajo

b)

$$\delta_D = \delta_{CD} + \delta_{BC} + \delta_{AB}$$

$$\delta_D = \frac{F_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E} + \frac{F_{BC} L_{BC}}{A_{BC} E} + \delta_B$$

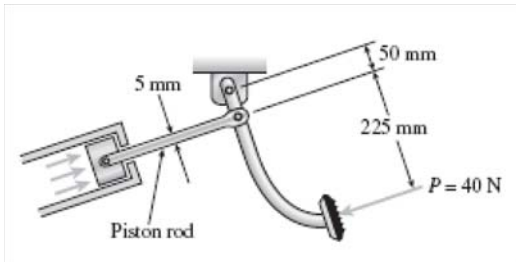
$$\delta_D := \frac{F_{cd} \cdot L_{cd}}{A_{cd} \cdot E} + \frac{F_{bc} \cdot L_{bc}}{A_{bc} \cdot E} + \delta_b$$

$\delta_D = 5.714 \cdot mm$ hacia abajo

Nota: <u>Observe que NO estamos tomando en cuenta la deformación de la barra debido a su propio peso. Estoy suponiendo que es despreciable, pero no siempre es así y no hay que olvidarlo. Te recomiendo que siempre lo verifiques para estar seguro de que la consideración que se está haciendo es correcta.</u>

Ejemplo 19: **(1.2-2 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 6th edition Brooks/Cole)**

Calculate the compressive stress σ_c in the circular piston rod (see figure) when a force P = 40 N is applied to the brake pedal.
Assume that the line of action of the force P is parallel to the piston rod, which has diameter 5 mm. Also the other dimensions shown in the figure (50 mm and 225 mm) are measured perpendicular to the line of action of the force P.



$P := 40 \cdot N$ $d := 5 \cdot mm$ $L_1 := 50 \cdot mm$ $L_2 := 225 \cdot mm$

$$A := \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\sum M_O = 0$$

$$F(L_1) = P(L_1 + L_2)$$

$$F = \frac{P(L_1 + L_2)}{L_1}$$

$$F := \frac{P \cdot (L_1 + L_2)}{L_1}$$

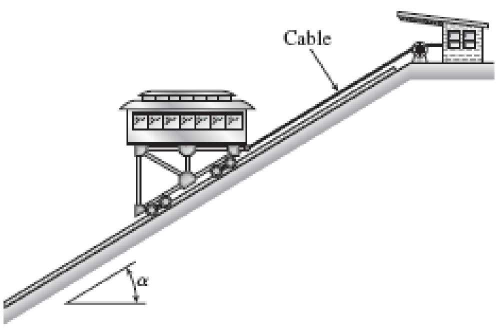
$F = 220\ N$

$$\sigma := \frac{F}{A}$$

$\sigma = 11.205 \cdot MPa$

Ejemplo 20: **(1.2-6 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 6th edition Brooks/Cole)**

A car weighing 130 KN when fully loaded is pulled slowly up a steep inclined track by a steel cable (see figure). The cable has an effective cross-sectional area of 490 mm^2, and the angle α of the inclined is 30°. Calculate the tensile stress σ_t in the cable.



$W := 130 \cdot 10^3 \cdot N$ $\alpha := 30 \cdot deg$ $A := 490 \cdot mm^2$

$$\sum F_X = 0$$

$$T = W \sin \alpha$$

$T := W \cdot \sin(\alpha)$

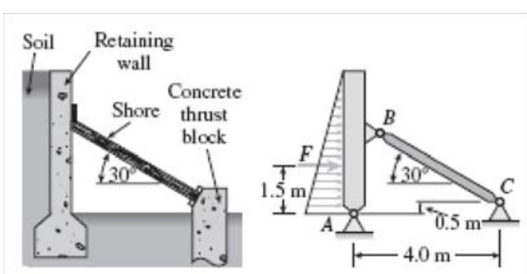
$T = 6.5 \times 10^4\ N$

$$\sigma := \frac{T}{A}$$

$\sigma = 132.653 \cdot MPa$

Ejemplo 21: **(1.2-8 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 6th edition Brooks/Cole)**

A long retaining wall is braced by wood shores set at an angle of 30° and supported by concrete thrust blocks, as shown in the firs part of the figure. The shores are evenly spaced, 3 m apart.
For analysis purpose, the wall and shores are idealized as shown in the second part. Note that the base of the wall and both ends of the shores are assumed to be pinned. The pressure of the soil against the wall is assumed to be triangular distributed, and the resultant force acting on a 3 meter length of the wall is F = 190 KN.
If each shore has a 150 mm x 150 mm square cross section, what is the compressive stress σ_c in the shores?



$\alpha := 30 \cdot deg$ $L := 4 \cdot m$ $h_2 := 0.5 \cdot m$ $h_1 := 1.5 \cdot m$

$L_1 := 3 \cdot m$ $F := 190 \cdot kN$ $b := 150 \cdot mm$ $h := 150 \cdot mm$

$$\sum M_A = 0$$

$$Fh_1 = R_{BC}(\cos \alpha)(L \tan 30°)$$

$$R_{BC} := \frac{F \cdot h_1}{\cos(\alpha) \cdot L \cdot \tan(\alpha)}$$

$R_{BC} = 142.5 \cdot kN$

$$\sigma_c := \frac{-R_{BC}}{b \cdot h}$$

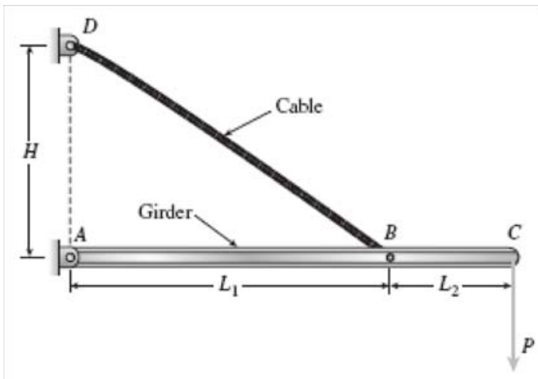
$\sigma_c = -6.333 \cdot MPa$

Ejemplo 22: **(1.2-9 Gere & Timoshenko, Mechanics of materials 6th edition Brooks/Cole)**

A loading crane consisting of a steel girder ABC supported by the cable BD is subjected to a load P (see figure). The cable has an effective cross-sectional area A = 0.471 in^2. The dimension of the crane are H = 9 ft, L_1 = 12 ft, and L_2 = 4 ft.

(a) if the load P = 9000 lb, what is the average tensile stress in the cable?

(b) If the cable stretches by 0.382 in., what is the average strain?



$A := 0.471 \cdot in^2$ $H := 9 \cdot ft$ $L_1 := 12 \cdot ft$ $L_2 := 4 \cdot ft$

$P := 9000 \cdot lbf$ $\Delta := 0.382 \cdot in$ $CD := \sqrt{H^2 + L_1^2}$

$$\sum M_A = 0 \qquad CD = 15 \cdot ft$$

$$P(L_1 + L_2) = T\left(\frac{H}{CD}\right)L_1$$

$$T := \frac{P \cdot (L_1 + L_2)}{L_1 \cdot \left(\frac{H}{CD}\right)} \qquad T = 8.896 \times 10^4 N$$

$$\sigma_t := \frac{T}{A} \qquad \sigma_t = 4.246 \times 10^4 \cdot psi \qquad \varepsilon := \frac{\Delta}{CD} \qquad \varepsilon = 2.122 \times 10^{-3}$$

Ejemplo 23: (1.65 R. C. Hibbeler, Mechanics of materials 7th edition Pearson)

Member A of the timber step joint for a truss is subjected to a compressive force of 5 KN. Determine the average normal stress acting in the hanger rod C which has a diameter of 10 mm and in member B which has a thickness of 30 mm.

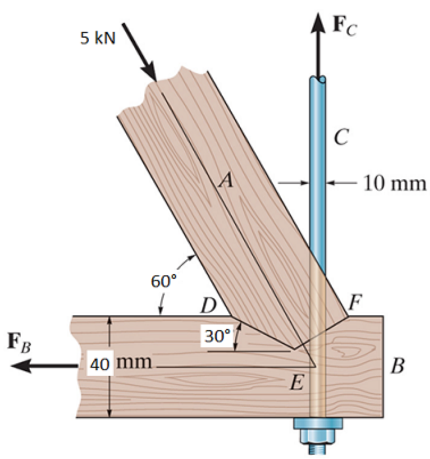


Figure: 01-26-26P1.065

$F := 5000 \cdot N$ $d := 10 \cdot mm$

$\theta := 60 \cdot deg$ $h := 40 \cdot mm$

$t := 30 \cdot mm$

$$\sum F_Y = 0$$

$$5000(\sin 60°) = F_C$$

$F_C := F \cdot \sin(\theta)$ $F_C = 4.33 \cdot kN$

$A_B := h \cdot t$

$F_B := F \cdot \cos(\theta)$ $F_B = 2.5 \cdot kN$

$$A := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad \sigma_C := \frac{F_C}{A} \qquad \sigma_C = 55.133 \cdot MPa$$

$$\sigma_B := \frac{F_B}{A_B} \qquad \sigma_B = 2.083 \cdot MPa$$

Ejemplo 24: (1.74 R. C. Hibbeler, Mechanics of materials 7th edition Pearson)

The bar has a cross-sectional area of 400 (10^{-6}) m^2 IIf it is subject to a uniform axial distributed loading along its length and to two concentrated loads as shown, determine the average normal stress in the bar as a function of x for 0.5 m < x < 1.25 m

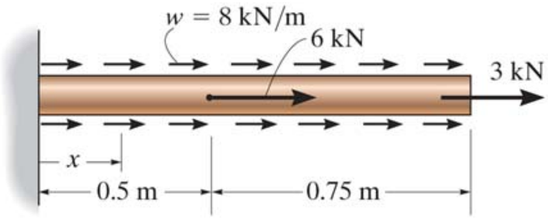


Figure: 01-26-33P1.073/074

Del diagrama de cuerpo libre del extremo derecho

$$\sum F_x = 0$$

$$3000 + 8000[0.5 + 0.75 - x] = R_x$$

$$3000 + 8000[1.25 - x] = R_x$$

$$\sigma_x = \frac{R_x}{A} = \frac{3000 + 8000(1.25 - x)}{400 \times 10^{-6}}$$

$$\sigma_x = \frac{13000 - 8000x}{400 \times 10^{-6}}$$

Ejemplo 25: (1.77 R. C. Hibbeler, Mechanics of materials 7th edition Pearson)

The pedestal supports a load P at its center. If the material has a mass density ρ, determine the radial dimension r as a function of z so that the average normal stress in the pedestal remains constant. The cross section is circular.

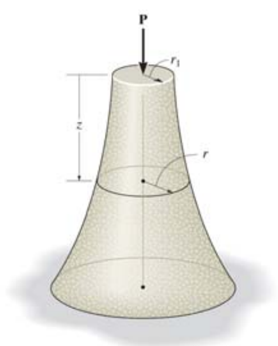


Figure: 01-26-36P1.077

$$\rho = \frac{m}{V} \;\Rightarrow\; m = \rho V$$

$$W = mg = \rho g V$$

$$\sigma = \frac{W}{A}$$

$$\sigma dA = dW$$

$$\sigma\left[\pi(r + dr)^2 - \pi r^2\right] = \rho g dV$$

$$\sigma\left[\pi r^2 + 2\pi r dr + \pi dr^2 - \pi r^2\right] = \rho g\left[\pi r^2 dz\right]$$

Despreciando los términos de orden superior se tiene:

$$\sigma[2\pi r dr] = \rho g\left[\pi r^2 dz\right]$$

$$2\sigma dr = \rho g r dz$$

Integrando la función anterior se obtiene:

$$2\sigma dr = \rho g r dz$$

$$\int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r} = \int_0^z \frac{\rho g}{2\sigma} dz$$

$$\ln \frac{r}{r_1} = \frac{\rho g}{2\sigma} z$$

$$r = r_1 e^{\frac{\rho g}{2\sigma} z}$$

Hoja dejada en blanco intencionalmente

Hoja dejada en blanco intencionalmente

Hoja dejada en blanco intencionalmente